UNIVERSITAS GADJAH MADA

Pemodelan Stokastik untuk Masalah ANTRIAN

Aplikasi:
1. Sistem Persamaan Linear & Matriks
2. Teori Antrian

Dwi Ertiningsih

dwi_ertiningsih@ugm.ac.id

http://dwiertiningsih.staff.ugm.ac.id

Departemen Matematika

FMIPA UGM

Mathematics is everywhere!

Antrian di BANK

Antrian Lalu Lintas

Antrian di Kantor Pos

Masalah Antrian di Kantor Pos

Outline

UNIVERSITAS GADJAH MADA

- Perumusan Masalah
- Model Matematika: Antrian di Kantor Pos
- Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)
- Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)
- Perhitungan Numerik

Perumusan Masalah: Model antrian di Kantor Pos

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Salah satu lembaga penyedia pelayanan jasa yang tidak dapat dipisahkan dari masalah antrian adalah Kantor Pos. Masalah ini terlihat pada antrian pelanggan yang menunggu dilayani di depan loket pelayanan. Untuk mengoptimalkan kinerja pelayanan pada loket pelayanan, digunakan teori antrian untuk mengetahui dan menganalisa model antrian yang cocok untuk diterapkan.

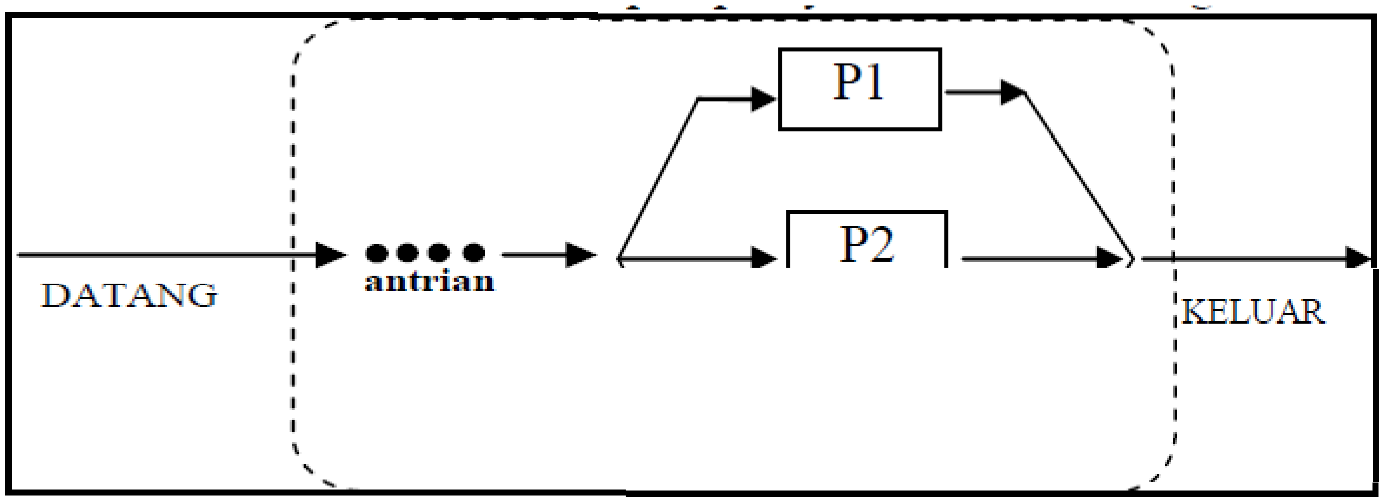
1. Bagaimanakah model antrian yang diterapkan pada loket pelayanan ?
2. Bagaimanakah mengoptimalkan waktu pelayanan pada loket pelayanan ?

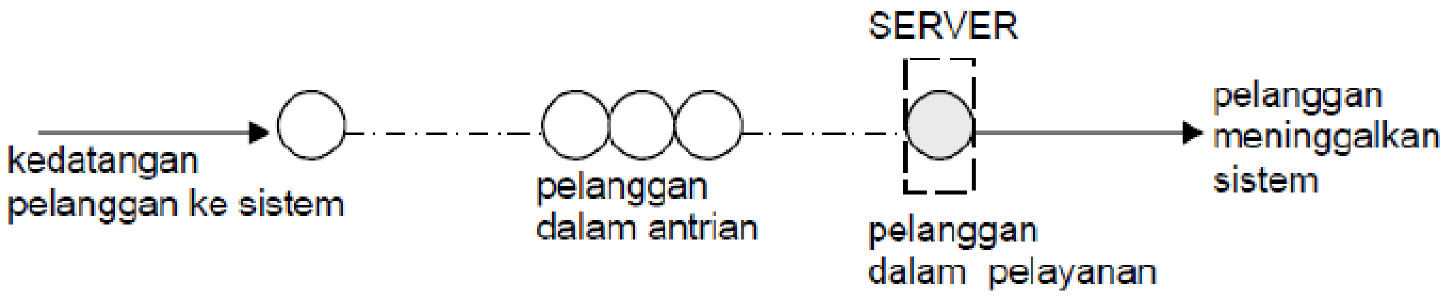
UNIVERSITAS GADJAH MADA

Bagaimana merancang sistem pelayanan sehingga waktu tunggu konsumen di antrian berkurang

Batasan Masalah:

Sistem Antrian dengan 1 server dan 2 server





Model Antrian di Kantor Pos

UNIVERSITAS GADJAH MADA

Kantor Pos **mempunyai 2 loket pelayanan**.

1. Loket A : melayani transaksi keuangan
2. Loket B : melayani transaksi pengiriman surat/barang

Misalkan:

- Waktu antar kedatangan pelanggan di loket A berdistribusi Eksponensial dengan laju 15 pelanggan/jam.
- Waktu antar kedatangan pelanggan di loket B berdistribusi Eksponensial dengan laju 18 pelanggan/jam.
- Waktu pelayanan di masing-masing loket berdsitribusi Eksponensial dengan laju 3 menit/orang.

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

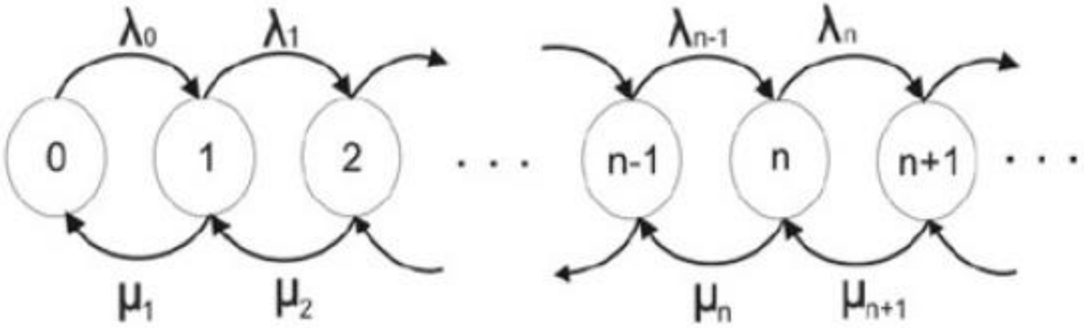
Asumsi:

- Waktu antar kedatangan dan pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$
- Faktor utilisasi $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
- Banyaknya server = 1
- State = banyaknya pelanggan dalam sistem,

  sehingga state space = {0,1,2,…}

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

- State space = {0,1,2,…} dengan $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$



- **Matriks Transisi**

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

- Matriks Transisi

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- Steady state $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$
- **Sistem Persamaan Linear**

$$\pi . Q = 0 \textit{ (balance equation)}$$

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/1)

UNIVERSITAS GADJAH MADA

- Steady state

❖ π_0 = 1 - ρ

❖ $\pi_1 = \rho(1 - \rho)$

❖ π_n = $\rho^n(1 - \rho)$, untuk n $\geq$ 2.

Model Antrian di Kantor Pos

Untuk mengurangi penumpukan pelanggan di antrian,

Manager akan menerapkan **kebijakan baru** yaitu:

setiap loket dapat melayani dua transaksi (keuangan dan pengiriman surat/barang).

Bagaimana efek dari sistem baru terhadap

- ❑Rerata jumlah pelanggan dalam sistem antrian
- ❑Rerata waktu yang dihabiskan pelanggan di antrian.

Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)

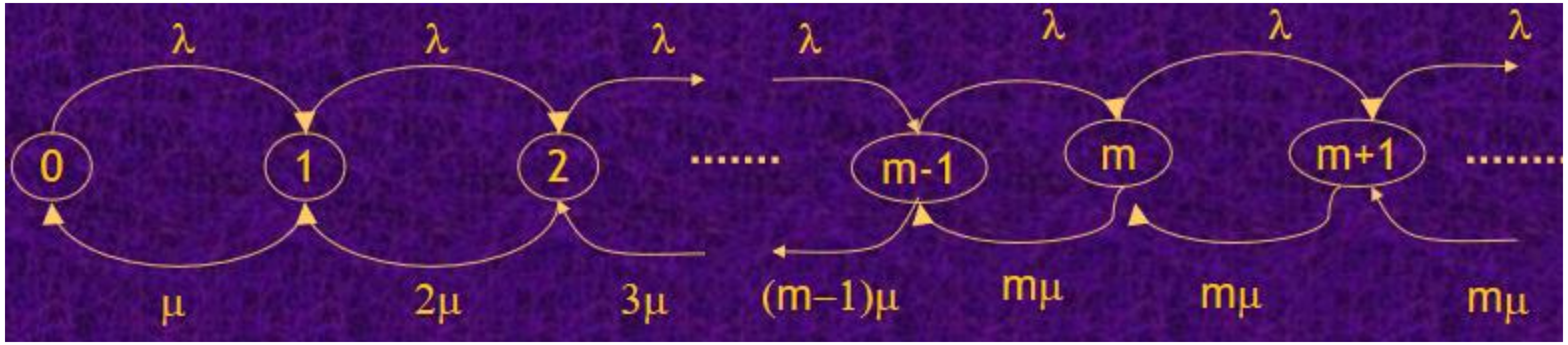
Asumsi:

- Waktu antar kedatangan dan pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju λ dan μ
- Banyaknya server m = 2
- Faktor utilisasi $\rho = \dfrac{\lambda}{2\mu}$
- State = banyaknya pelanggan dalam sistem,

  sehingga state space = {0,1,2,…}

Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)

- **State space** = {0,1,2,…}



- **Matriks Transisi**

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sistem Antrian dengan 1 server (M/M/2)

- **Matriks Transisi**

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- **Steady state** $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$
- **Sistem Persamaan Linear**

$$\pi . Q = 0 \textit{ (balance equation)}$$

Sistem Antrian dengan 2 server (M/M/2)

- **Steady state**

❖ $\pi_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}$

❖ $\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \pi_0$

❖ $\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \rho^{n-2} \pi_0, \quad \text{untuk } n \geq 2.$

Little's formula:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda};\ W = W_q + \frac{1}{\mu};\ L = \lambda W.$$

M/M/1

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)};$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$L = \lambda W = \frac{\rho}{1-\rho}$$

M/M/s

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\pi_n$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right\}^{-1}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W$$

Sistem Antrian di Kantor Pos (M/M/1)

❑ M/M/1 Loket A

λ = 15

μ = 3 menit/pelanggan = 20 pelanggan/jam

ρ = λ/ μ = 3/4 = 0.75

Rerata jumlah pelanggan di loket A = L = $\frac{\rho}{1-\rho}$ = 3 pelanggan

Rerata waktu yang dihabiskan pelanggan = W = 0.2 jam = 12 menit

❑ M/M/1 Loket B

λ = 18, μ = 3 menit/pelanggan = 20 pelanggan/jam

ρ = λ/ μ = 9/10 = 0.9

Rerata jumlah pelanggan di loket B = L = $\frac{\rho}{1-\rho}$ = 9 pelanggan

Rerata waktu yang dihabiskan pelanggan = W = 0.5 jam = 30 menit

Jadi, **rerata jumlah pelanggan di dalam sistem antrian** adalah = 3 + 9 = 12 pelanggan.

Sistem Antrian di Kantor Pos (M/M/2)

❑ M/M/2

λ = 15 + 18 = 33

μ = 3 menit/pelanggan = 20 pelanggan/jam

ρ = λ/ 2μ = 33/40 = 0.825

$$\pi_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1} = 0.0959$$

L_q= 3.516 pelanggan

W_q= 0.107 jam = 6.42 menit

W = 0.517 jam = 31.02 menit

L = 5.166 pelanggan